УДК 530.12

С. Парновський, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

# ВАКУУМНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗТВ, ЩО ЗАЛЕЖАТЬ ВІД ОДНІЄЇ КООРДИНАТИ

***У відомому підручнику Ландау та Ліфшиця виведено всі вакуумні метрики загальної теорії відносності, які залежать від однієї координати за відсутності космологічної сталої. На жаль, у ході виведення автори пропустили деякі варіанти, які розглядаються в цій статті. Наведено точний розв'язок, відсутній у книзі, який описує простір-час із гравітаційною хвилею нульової частоти. Показано, що не існує інших розв'язків цього типу, крім наведених у книзі, згаданій вище, та метрики Мінковського.***

***Ключові слова: загальна теорія відносності, точні розв'язки.***

**Вступ**. Рівняння загальної теорії відносності (ЗТВ) є системою нелінійних рівнянь, тому знаходження їх точних розв'язків є складною задачею. Існують книги, цілком присвячені таким розв'язкам, наприклад [1]. Особливу роль серед них грають найпростіші розв'язки. До них належать, зокрема такі, метрика яких залежить від одної змінної. У цій статті я розглядаю рівняння без космологічної сталої, як у відомому підручнику Ландау та Ліфшиця (російське видання [2], англійський переклад [3], у них трошки різняться нумерації) і користуюсь тими самими позначеннями та вибором знаків, як і у книзі [2].

Можна знайти всі розв'язки, метрика яких залежить від одної змінної, для випадку, коли відсутня матерія або інші джерела тензору енергії-імпульсу у правій частині рівнянь Айнштайна (розв'язок у вакуумі або вакуумний розв'язок). Це описано у § 117 та § 109 у [2] та § 103 у [3]. У § 109 розглянуто випадок сильної гравітаційної хвилі, коли координата, від якої залежить метрика простору-часу (ПЧ), є ізотропною. У роботі я демонструю, що розгляд, описаний у § 117 [2] для випадку, коли координата є часоподібною або простороподібною, є неповним і виводжу вакуумну метрику, що залежить лише від такої координати, якою треба доповнити результати § 117 у [2] та § 103 у [3].

**Метрики, розглянуті у роботі [2].** Під час розгляду відповідних розв'язків авторів підручника [2] насамперед цікавлять космологічні розв'язки, тому вони шукають метрики, що залежать тільки від часоподібної координати $t$. Тому розв'язок шукають у синхронній системі, отримують відповідні умови (117.2–117.4) та рівняння без номера, що йде за ними, із чого робиться висновок про те, що детермінант метрики має бути пропорційним до $t^2$. Як результат можна отримати відому вакуумну метрику Казнера, яку він вивів ще 1921 р. [4]. Вона має вигляд

$$ds^2 = dt^2 - t^{2p_1}dx^2 - t^{2p_2}dy^2 - t^{2p_3}dz^2. \tag{1}$$

Координати $x, y, z$ є просторовими. Константи, що позначено як $p_i, i = 1, 2, 3$, звуться казнерівськими показниками або індексами і пов'язані між собою двома умовами :

$$\sum_{i=1}^{3} p_i = p_1 + p_2 + p_3 = 1\ , \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{3} {p_i}^2 = {p_1}^2 + {p_2}^2 + {p_3}^2 = 1. \tag{3}$$

Метрика (1) відповідає вакуумному розв'язку для однорідної анізотропної космологічної моделі типу I за Біанкі. Узагальнюючи її, можна отримати складніші розв'язки, зокрема найбільш загальний коливальний розв'язок Белінського – Ліфшица – Халатнікова біля космологічної сингулярності (див. § 118 у [2] або § 113 у [3]). Таким чином, це дуже важлива метрика, що лежить в основі розгляду анізотропних космологічних моделей.

Проте в оригінальній роботі [4] Казнер отримав іншу метрику, яка схожа на (1) але залежить від просторової координати $x$ та має голу часоподібну сингулярність при $x$=0. Це

$$ds^2 = -dx^2 + x^{2p_1}dt^2 - x^{2p_2}dy^2 - x^{2p_3}dz^2. \tag{4}$$

Сингулярності при $t$ =0 в (1) та $x$=0 у (4) є істинними, крім випадків $p_i = (1, 0, 0)$ або $p_i = (0, 0, 1)$, тобто в них розходяться інваріанти кривизни.

Як й інші точні розв'язки ЗТВ, метрика (4) потребує непростого аналізу ПЧ, який вона описує. Це можна зробити на основі розгляду його геодезичних ліній [5]. Аналіз ускладнюється через нескінченні розміри сингулярності. Тому її фізичний сенс краще досліджувати у випадку подібної особливості зі скінченними розмірами, що описується так званою γ-метрикою. Це зроблено у роботі [6]. Доведено, що при $p_1 < 0$ сингулярність є точковою з від'ємною масою, при $0 < p_1 < 2/3$ вона лінійна, а при $p_1 > 2/3$ – це новий тип особливості, неможливий у просторі зі скінченною кривизною. У [6] такі особливості названо парадоксальними. Зазначимо, що три принципово відмінних за їхніми властивостями сингулярності описуються однією метрикою (4). Це є наслідком нелінійності рівнянь ЗТВ, де не діє принцип суперпозиції. На відміну від (1), властивості (4) залежать від послідовності індексів у наборі, бо перший із них виділений через сигнатуру метрики. Узагальнюючи (6), можна отримати коливальний розв'язок біля часоподібних сингулярностей [7].

Крім (4) є ще два точні розв'язки рівнянь ЗТВ у вакуумі, метрики яких залежать від однієї просторової змінної. Вони описані в задачах 1 та 2 після § 117 у [2] та після § 104 у [3], а відповідні ПЧ досліджено у [8]. Вони відповідають випадку, коли казнерівські індекси є комплексними або серед них є однакові.

**Випадок, не розглянутий у роботі [2].** Проте наведений розгляд не є вичерпним. Це видно, наприклад з того, що серед отриманих розв'язків немає метрики Мінковського. Проблема в тому, що рівняння, яке описує залежність детермінанта метрики від координати $t$ або $x$, має ще один розв'язок. Він відповідає випадку, коли детермінант є сталим. Тоді його можна вважати рівним –1 і замість рівнянь (117.6) у [2] або (103.7) у [3] маємо таку систему:

$$\gamma'_{\alpha\beta} = 2\lambda_{\alpha}^{\delta}\gamma_{\delta\beta}\,. \tag{5}$$

Тут тензор $\gamma_{\alpha\beta}$ є частиною метричного тензора, штрихом позначена похідна за координатою, від якої залежить метрика, а $\lambda_{\alpha}^{\delta}$ – стала матриця, яка задовольняє дві умови:

$$\lambda_{\alpha}^{\alpha} = \lambda_{\beta}^{\alpha}\lambda_{\alpha}^{\beta} = 0\,. \tag{6}$$

Якщо її власні значення є дійсними та вони відрізняються один від одного, то матрицю можна привести до діагонального вигляду. Через (6) ми знаходимо, що всі власні значення дорівнюють нулю і метрика ПЧ є метрикою Мінковського.

Якщо одне власне значення є дійсним, а два інші – комплексно спряженими, то вони через (6) пропорційні до $\left(-2; 1+\sqrt{3}i; 1-\sqrt{3}i\right)$. Після перетворення координат метрика цього вакуумного розв'язку набуває вигляду

$$ds^2 = -dx^2 + e^{\alpha x}\left(\cos(\sqrt{3}\alpha x)\,(du^2 - dv^2) + 2\sin(\sqrt{3}\alpha x)du dv\right) - e^{-2\alpha x}dz^2\,. \tag{7}$$

Тут α – довільна константа. Тензор кривизни не дорівнює нулю, отже це не метрика Мінковського в нестандартній системі координат. Інваріанти кривизни є сталими, сингулярності відсутні. Це сильна гравітаційна хвиля нульової частоти. Координати $x$ і $z$ є просторовими, а координати $u$ та $v$ змінюють свій тип періодично за $x$.

Оскільки три дійсні власні значення матриці $\lambda_{\alpha}^{\delta}$ збігаються (вони дорівнюють нулю), то перетворенням координат її можна звести до вигляду, в якому елементи на діагоналі та по один бік від неї є нульовими. Із цієї канонічної форми, умови збереження детермінанта й симетричності метричного тензора можна звести метрику до такої:

$$ds^2 = -dx^2 + 2du dv + Ax\,du^2 - dz^2\,, \tag{8}$$

де константу $A$ можна зміною масштабів координат перевести у 0, 1 або –1. Але тензор кривизни, отриманий за (8), дорівнює нулю, тобто (8) – це просто метрика Мінковського у незвичних координатах.

**Висновки**. Я завершив виведення всіх можливих вакуумних метрик у ЗТВ без космологічної сталої, розглянуте у § 117 та § 109 у [2] та § 103 у [3]. Виявлено розв'язок (7), пропущений у книзі. Він описує метрику, в якій координата $x$, від якої вона залежить, є простороподібною, ПЧ не має сингулярностей. Цей розв'язок описує гравітаційну хвилю нульової частоти. На відміну від (1) та (4) він не є важливим за дослідження властивостей ПЧ поблизу сингулярностей довільного типу. Але (7) завершує перелік метрик, що мають певні властивості, і без неї він не є повним.

**Список літератури**

1. Exact solutions of Einstein's field equations / H. Stephani, D. Kramer, M. A. H. MacCallum et al. // Cambridge University Press. – 2015 .
2. Landau L. D. The classical theory of fields 1980 / L. D. Landau, E. M. Lifshitz. – M. : Наука, 1973.
3. Landau L. D. The classical theory of fields 1980 / L. D. Landau, E. M. Lifshitz. – Butterworth-Heinemann. 1980.
4. Kasner E. Geometrical theorems on Einstein's cosmological equations American / E. Kasner // Journal of Mathematics – 1921. – Vol. 43. – P. 217–221.
5. Khalatnikov I. M. On the motion of particles in the field of a naked Kasner-type singularity / I. M. Khalatnikov, S. L. Parnovsky // Physics Letters A. – 1978. – Vol. 66. – P. 466–468.
6. Парновский С. Л. Тип и структура времяподобных сингулярностей в общей теории относительности: от гамма-метрики до общего решения / С. Л. Парновский // ЖЭТФ. – 1985. – Т. 88. – С. 1921–1938.
7. Parnovsky S. L. Gravitation fields near the naked singularities of the general type / S. L. Parnovsky // Physica A. – 1980. – Vol. 104. – P. 210–222.
8. Парновський С. Л. Движение частиц в поле голой особенности казнеровского типа с комплексными или равными показателями / С. Л. Парновский // ЖЭТФ. – 1979. – Vol. 76. – С. 385–392.
9. Parnovskii S. L Motion of particles in the field of a naked singularity of Kasner type with complex or equal exponents / S. L. Parnovskii // Journal of Experimental and Theoretical Physics. –1979. – Vol. 49. – P. 195.

Надійшла до редколегії 31.01.2021

**С. Парновский, д-р физ.-мат. наук, проф.**
**Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина**

## ВАКУУМНЫЕ РЕШЕНИЯ ОТО, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ОДНОЙ КООРДИНАТЫ

***В известном учебнике Ландау и Лифшица выведены все вакуумные метрики общей теории относительности, которые зависят от одной координаты при отсутствии космологической постоянной. К сожалению, при выводе авторы пропустили некоторые варианты, которые рассматриваются в этой статье. Приведено точное решение, которое отсутствует в книге и описывает пространство-время с гравитационной волной нулевой частоты. Показано, что не существует других решений данного типа, кроме приведенных в книге, упомянутой выше, и метрики Минковского.***

***Ключевые слова: общая теория относительности, точные решения.***

**S. Parnovsky, Dr Hab., Prof.**
**Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine**

## VACUUM SOLUTIONS OF EINSTEIN EQUATIONS THAT DEPEND ON ONE COORDINATE

***In the famous textbook written by Landau and Lifshitz all the vacuum metrics of the general theory of relativity are derived, which depend on one coordinate in the absence of a cosmological constant. Unfortunately, when considering these solutions the authors missed some of the possible solutions discussed in this article. An exact solution is demonstrated, which is absent in the book by Landau and Lifshitz. It describes space-time with a gravitational wave of zero frequency. It is shown that there are no other solutions of this type than listed above and Minkowski's metrics. The list of vacuum metrics that depend on one coordinate is not complete without solution provided in this paper.***

***Keywords: general relativity, exact solutions.***