С. Парновский, д-р физ.-мат. наук
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев

ВЛИЯНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ НА ВЕЛИЧИНУ ПОСТОЯННОЙ ХАББЛА, ОПРЕДЕЛЕННОЙ ПО СКОРОСТЯМ ГАЛАКТИК

При обработке данных о скоростях галактик и независимых от них оценок расстояний до них на основе любой статистической зависимости возникает эффект, родственный известному эффекту Малквиста. Он приводит к занижению величины постоянной Хаббла, полученной обычно применяемым при этом методом наименьших квадратов. Уменьшение составляет около 5 % при погрешности оценки расстояний 20 % и около 9 % при ошибке в 30 %. Этим нельзя объяснить обнаруженное недавно противоречие между значениями постоянной Хаббла, полученными в ранней и современной Вселенной, поскольку занижается большая из этих величин.

Ключевые слова: постоянная Хаббла, расстояния до галактик, статистические методы обработки данных.

S. Parnovsky, Dr Hab.
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

IMPACT OF THE STATISTICAL EFFECTS ON THE HUBBLE CONSTANT VALUE OBTAINED FROM VELOCITIES OF GALAXIES

We can obtain the Hubble constant value for the late Universe from the sample of radial velocities of galaxies and independent estimations of distances to them based on any statistical relation such as Cepheid variables, Tully-Fisher relation etc. Usually, the method of least squares is used when processing such data. However, the value of the Hubble constant is somewhat underestimated due to a statistical effect similar to the well-known Malmquist bias. The main source of underestimation is associated with the deviation of the distances determined from the statistical dependence from their true values. The decrease of obtained Hubble constant value is about 5% for an error in the distance estimation of 20% and about 9% with an error of 30%.

This impact cannot explain the recently discovered tensions between the values of Hubble constant obtained from the early and the late Universe. The estimation H_0 = 67.4 km/s/Mpc obtained from observations in the recombination era account for about 92% of the average of the estimations based on observations of not very distant objects H_0 = 73.3 km/s/ Mpc. Indeed, the described effect leads to underestimation of the largest of these values.

Key words: Hubble constant, distances to galaxies, statistical methods of data processing.

УДК 524.8

В. Жданов, д-р фіз.-мат. наук, проф.,
О. Сташко, асп.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ

ПАРАМЕТР ГАББЛА В *f* (*R*)-ГРАВІТАЦІЇ

Вивчено умови на лагранжіани модифікованої гравітації, що імітують спостережувані величини стандартної космологічної моделі. А саме, розглянуто питання про вибір лагранжіана f(R)-гравітації на основі діаграми Габбла. Отримано рівняння для f(R), які, для заданого параметра Габбла H(z), дозволяють визначати цю величину. Також розглянуто обернену задачу знаходження H(z) для заданої функції f(R), яка мало відрізняється від виразу загальної теорії відносності; знайдено загальниий наближений вираз для H(z).

Ключові слова: космологія, параметр Габбла, f(R)-гравітація.

Вступ. Проблема "Hubble constant tension" стимулювала розробку розширень стандартної космологічної моделі, націлених на те, щоб отримати відмінну від ΛCDM залежність параметра Габбла H від червоного зміщення z і використати це для узгодження значень "ранньої" і "пізньої" сталої Габбла [1]. Із цією метою можна використовувати так звану *f*(*R*)-гравітацію, яка модифікує загальну теорію відносності (ЗТВ) шляхом ускладнення гравітаційного лагранжіана за допомогою нелінійних степенів скалярної кривини (див., напр., [2] та посилання у цій роботі). Відповідна дія є

$$S = -\frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}f(R) . \quad (1)$$

Рівняння поля, що відповідають виразу (1), мають вигляд як у [2]

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) - \nabla_\mu\nabla_\nu f' + \Box f' g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} , \quad (2)$$

де $R_{\mu\nu}$ – тензор Річчі, $R = g_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}$; $f' \equiv df/dR$; $T_{\mu\nu}$ – стандартний тензор енергії імпульсу, який визначається з лагранжіана негравітаційних полів. У ЗТВ $f(R) = f_{GR}(R) \equiv R$, де адитивна константа в лагранжіані, яка відповідає внеску космологічної сталої в рівняннях Ейнштейна, далі буде врахована шляхом введення доданка $\varepsilon_\Lambda g_{\mu\nu}$ в $T_{\mu\nu}$.

Модифікації $f(R)$ природним чином впливатимуть на поведінку залежності $H(z)$, яку можна порівнювати з експериментальними даними. У цій роботі ми розглянемо і пряму задачу визначення обмежень на $f(R)$ на основі $H(z)$, і запропонуємо загальний наближений вираз для $H(z)$ за умови малих відхилень від ейнштейнівської $f(R)$.

Космологічні рівняння. Розглянемо метрику однорідного ізотропного Всесвіту й обмежимося просторово-плоским випадком:

$$ds^2 = dt^2 - a^2\left[d\chi^2 + \chi^2 dO^2\right] ,$$

де $a(t)$ – масштабний фактор. У цьому разі можна покласти $a(t_0) = 1$ без впливу на результати обчислення фізичних величин. Усі скалярні величини залежать лише від космологічного часу t , тому в "00"-компоненті рівняння (2) залишається лише перша похідна від $f \equiv f(R)$:

$$3H\frac{df'}{dt}+f'R_{00}-\frac{1}{2}f=\kappa T_{00}\,. \tag{3}$$

Можна показати, що у процесі виконання рівняння (3) також буде виконуватися рівняння для компоненти "00" за умови виконання коваріантного закону збереження для $T_{\mu\nu}$.

Перейдемо від змінної t до червоного зміщення $z=1/a(t)-1$;

$$dz=-\frac{1}{[a(t)]^2}\dot{a}(t)dt=-(1+z)Hdt\ ,$$

де $H=\dfrac{da}{adt}$ – параметр Габбла.

Виразимо всі необхідні величини через H та його похідні. Зокрема,

$$R_{00}=-3\frac{\ddot{a}}{a}=3\left(\frac{1+z}{2}\frac{dH^2}{dz}-H^2\right),\qquad R=-6\left(\frac{\ddot{a}}{a}+H^2\right)=6\left(\frac{1+z}{2}\frac{dH^2}{dz}-2H^2\right). \tag{4}$$

З урахуванням (4) рівняння (3) набуде вигляду

$$-3(z+1)H^2\frac{df'}{dz}+3\left(\frac{1+z}{2}\frac{dH^2}{dz}-H^2\right)f'-\frac{1}{2}f=\kappa T_{00}\,. \tag{5}$$

Диференціюючи (5), отримуємо лінійне диференціальне рівняння другого порядку відносно f':

$$(z+1)H^2\frac{d^2f'}{dz^2}+\left(\frac{1+z}{2}\frac{dH^2}{dz}+2H^2\right)\frac{df'}{dz}-f'\frac{dH^2}{dz}=-\frac{\kappa}{3}\frac{dT_{00}}{dz}\,, \tag{6}$$

яке дає змогу визначити f' у параметричному вигляді, якщо відомі T_{00} та $H(z)$ з певних фізичних або спостережних міркувань.

Довільність у визначенні $f(R)$. Нехай T_{00} відповідає певній космологічній моделі, для якої розв'язок у межах ЗТВ дає відоме рівняння Фрідмана $H=H_{GR}(z)=\frac{\kappa}{3}T_{00}$ при $f(R)\equiv R$. Явний вигляд $H_{GR}(z)$ залежить від внеску різних типів матерії. Покладемо $f(R)=R+\phi(z)$, де скалярна кривина R пов'язана з параметром Габбла відповідно до (4) при $H=H_{GR}(z)$. Згідно з (5) для $\phi(z)$ маємо

$$(z+1)H_{GR}^2\frac{d^2\phi'}{dz^2}+\left(\frac{1+z}{2}\frac{dH_{GR}^2}{dz}+2H_{GR}^2\right)\frac{d\phi'}{dz}-\phi'\frac{dH_{GR}^2}{dz}=0 \tag{7}$$

– однорідне диференціальне рівняння другого порядку, яке, очевидно, може мати ненульові розв'язки.

Проілюструємо це в межах моделі Всесвіту, заповненого темною енергією з густиною $\varepsilon_\Lambda=\mathrm{const}$ та холодною речовиною з густиною енергії ε_c (з нульовим тиском). У цьому разі, з урахуванням вимог однорідності й ізотропії, $T_{00}=\varepsilon_c(t)+\varepsilon_\Lambda,\quad T_{ij}=-\varepsilon_\Lambda g_{ij}$ ($i,j=1,2,3$). З рівняння збереження $\nabla_\mu T^{\mu\nu}=0$ отримуємо рівняння гідродинаміки, звідки одержуємо звичайне співвідношення $\varepsilon_c(z)=\varepsilon_c(t_0)(1+z)^3$; відповідно

$$H_{GR}^2=H_0^2h^2(z),\qquad h^2(z)=\Omega_c(z+1)^3+\Omega_\Lambda,\qquad H_0=\frac{\kappa}{3}\varepsilon_{tot}\,. \tag{8}$$

де $\Omega_c=\dfrac{\varepsilon_c(t_0)}{\varepsilon_{tot}},\quad \Omega_\Lambda=\dfrac{\varepsilon_\Lambda}{\varepsilon_{tot}}$, $\varepsilon_{tot}=\varepsilon_c(t_0)+\varepsilon_\Lambda$.

Зауважимо, що в пострекомбінаційний період в ε_c можна включити звичайну баріонну матерію та холодну темну матерію. Тоді (7) зводиться до

$$(z+1)\left[\Omega_c(z+1)^3+\Omega_\Lambda\right]\frac{d^2\phi'}{dz^2}+\left(\frac{7}{2}(1+z)^3\Omega_c+2\Omega_\Lambda\right)\frac{d\phi'}{dz}-3\Omega_c(1+z)^2\phi'=0\,. \tag{9}$$

При $\Omega_\Lambda=0,\quad \Omega_c=1$ це рівняння допускає точні (степеневі) розв'язки. Вони відповідають асимптотиці розв'язків (9) за великих z ($R\to-\infty$), $z+1\approx(-R/3)^{1/3}$:

$$(z+1)^2\frac{d^2\phi'}{dz^2}+\frac{7}{2}(1+z)\frac{d\phi'}{dz}-3\phi'=0\,,\qquad \phi'(R)\approx C_1(-R)^{\frac{1}{12}\left(\sqrt{73}-5\right)}+C_2(-R)^{-\frac{1}{12}\left(5+\sqrt{73}\right)}.$$

Відповідно, нехтуючи константою інтегрування, маємо

$$f(R)=f_{GR}(R)+\tilde{C}_1(-R)^{\beta_1}+\tilde{C}_2(-R)^{\beta_2},\quad \beta_1=\frac{\sqrt{73}+7}{12},\ \beta_2=\frac{-\sqrt{73}+7}{12}\,,$$

де домінуючим компонентом за великих R та z, що відповідають близькості до моменту рекомбінації водню є перший доданок $f(R)\approx f_{GR}(R)+\tilde{C}_1(-R)^{\beta_1}$. Отже, залишається довільність вибору однієї константи, для визначення якої потрібна додаткова інформація. Зазначимо, що є певні свідчення [3] щодо відмінності діаграми Габбла від результатів стандартної моделі, але ці результати ще вимагають ретельної перевірки.

Наближені розв'язки динамічних рівнянь для заданого *f(R)*. Розглянемо тепер обернену задачу визначення $H(z)$, якщо відомоме $f(R)$. Природно припустити, що внесок функції $\phi(z)=f(R)-R$, яка відрізняє рівняння модифікованої гравітації від ЗТВ, досить малий у сучасну епоху та для певного періоду в минулому. Це дає змогу досить просто будувати наближені розв'язки для $H(z)$. З рівняння (6) маємо, з урахуванням (4),

$$H^2=\frac{\kappa}{3}T_{00}-(z+1)H^2\phi''\frac{dR}{dz}+\phi'\left(\frac{1+z}{2}\frac{dH^2}{dz}-H^2\right)-\frac{\phi}{6}. \quad (10)$$

Розглянемо тензор $T_{\alpha\beta}$ відповідно до ΛCDM, а також нульове наближення для параметра Габбла згідно з (8). Тоді з (10) маємо аналітичний, але наближений, розв'язок для

$$\begin{aligned}H^2(z)=\frac{\kappa}{3}\varepsilon_{tot}\left[\Omega_c(1+z)^3+\Omega_\Lambda\right]+9H_0^4\Omega_c(1+z)^3\left[\Omega_c(z+1)^3+\Omega_\Lambda\right]\phi''(R_{GR})+\\+\frac{1}{2}\phi'(R_{GR})H_0^2\left(\Omega_c(z+1)^3-2\Omega_\Lambda\right)-\frac{\phi(R_{GR})}{6},\end{aligned} \quad (11)$$

де R_{GR} виражається явно через z у силу (4), (8).

Проілюструємо це для варіанта $f(R)$-гравітації, розглянутого О. Старобінським [4] з $f(R)=R+\alpha R^2$, де $\alpha>0$ – мала константа.

З точністю до першого порядку по α отримуємо з (11)

$$H(z)=H_0^*\left[\Omega_c(1+z)^3+\Omega_\Lambda-\alpha^*(1+z)^6\right]^{1/2}, \quad (12)$$

де $H_0^*=H_0\left[1-\alpha^*\right]^{-1/2}$, $\alpha^*=\alpha\frac{27}{2}\Omega_c^2H_0^2=\frac{27}{2}\Omega_c^2\mu$. Формула (12) справедлива за умови достатньої мализни параметра $\alpha^*<<\Omega_c(1+z_{\max})^{-3}$ для $0\le z\le z_{\max}$. Ця формула може бути безпосередньо застосована для обчислення фотометричної відстані й відстані за кутовим діаметром. Знайдемо часову залежність масштабного фактора. З (12) маємо рівняння

$$\frac{\dot a}{a}=H_0^*\left[\Omega_c a^{-3}+\Omega_\Lambda-\alpha^* a^{-6}\right]^{1/2},$$

яке зводиться до квадратур. Звідси за $t\le t_0$

$$\frac{a^3+\frac{\Omega_c}{2\Omega_\Lambda}+\left[a^6+\frac{\Omega_c}{\Omega_\Lambda}a^3-\frac{27}{2\Omega_\Lambda}\alpha\Omega_c^2H_0^2\right]^{1/2}}{1+\frac{\Omega_c}{2\Omega_\Lambda}+\left[1+\frac{\Omega_c}{\Omega_\Lambda}-\frac{27}{2\Omega_\Lambda}\alpha\Omega_c^2H_0^2\right]^{1/2}}=\exp\left[3\sqrt{\Omega_\Lambda}H_0^*(t_0-t)\right].$$

Якщо покласти $\alpha=0$, отримаємо звичайний режим ΛCDM-моделі. При $\Omega_\Lambda\to0$, $\Omega_c\to1$, розкладаючи обидві частини рівняння, отримаємо $a(t)\sim\left(t_0-t\right)^{2/3}$.

Висновки. Ми отримали наближені рівняння для парамера Габбла у випадку загальних, але малих поправок до гравітаційного лагранжіана загальної теорії відносності. Натомість, ми одержали рівняння для визначення лагранжіана $f(R)$-гравітації через параметр Габбла. Варіанти вибору $f(R)$ за цими рівняннями можуть імітувати звичайні розв'язки ΛCDM, щоб їх відсіяти, необхідна додаткова інформація. Але, як показують приклади, рівняння (7) мають спадну та зростаючу моди, що можна використати для обмеження довільності у розв'язках. Утім урахування додаткових ступенів вільності може допомогти знайти розв'язання відомої проблеми "Hubble tension" за збереження основних припущень щодо складу Всесвіту.

Автори вдячні О. М. Александрову за корисні зауваження. Робота частково підтримана Національним фондом досліджень України за проєктом № 2020.02/0073 та програмою "Астрономія та фізика космосу", тема 19БФ023-01.

Список використаних джерел

1. Di Valentino E. Cosmology Intertwined II: The Hubble Constant Tension / E. Di Valentino // arXiv:2008.11284v3 (2020).
2. De Felice A. f(R) theories / A. De Felice, S. Tsujikawa // Living Rev. – Rel. 13, id. 3 (2010).
3. Tension with the flat _CDM model from a high-redshift Hubble diagram of supernovae, quasars, and gamma-ray bursts / E. Lusso, E. Piedipalumbo, G. Risaliti et al. // arXiv:1907.07692v4 (2019).
4. Starobinsky A. A. A new type of isotropic cosmological models without singularity / A. A. Starobinsky // Phys. Lett. –1980. – 91B. – P. 99–102.

Надійшла до редколегії 14.10.20

В. Жданов, д-р физ.-мат. наук,
А. Сташко, асп.
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев

ПАРАМЕТР ХАББЛА В f(R)-ГРАВИТАЦИИ

Изучены условия на лагранжианы модифицированной гравитации, имитирующие наблюдаемые величини стандартной космологической модели. Рассмотрен вопрос выбора лагранжиана f(R)-гравитации на основе диаграммы Хаббла. Получены уравнения для f(R), которые позволяют определить эту величину для заданного параметра Хаббла H(z). Рассмотрена и обратная задача определения H(z) для заданной функции f(R), которая мало отличается от выражения общей теории относительности; найдено общее приближенное выражение для H(z).

Ключевые слова: космология, параметр Хаббла, f(R)-гравитация.

V. Zhdanov, Dr Hab.,
O. Stashko, PhD Student
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

HUBBLE PARAMETER IN f(R)-GRAVITY

In view of the famous problem with the "Hubble constant tension" there is a number of approaches to modify the cosmological equations and correspondingly modify Hubble parameter H(z in order to to relieve the tension between the "early" and "late" Hubble constants. f(R)-gravity is one of such possible modifications. We discuss how to choose the Lagrangian in the f(R)-gravity on account of observational data within the homogeneous isotropic cosmology. The equation is obtained that enable us to derive f(R) for given Hubble parameter H(z).

$(z+1)H^2\frac{d^2f'}{dz^2}+\left(\frac{1+z}{2}\frac{dH^2}{dz}+2H^2\right)\frac{df'}{dz}-f'\frac{dH^2}{dz}=-\frac{\kappa}{3}\frac{dT_{00}}{dz}$ *; z is the redshift, $f'\equiv df/dR$ and R expressed in the usual way by means of H and its derivatives. This yields a second order differential equation with corresponding degrees of freedom. If $H(z)$ corresponds to that obtained from usual Friedmann equations, this equation yields a condition for $f(R)$ to mimic the observable quantities of the standard ΛCDM with the above-mentioned freedom. To reduce this freedom on needs additional considerations, which involve the other observable quantities, such as those which appear in considerations of cosmological perturbations on the isotropic and homogeneous background. Also, we consider the reverse problem to find $H(z)$ for given $f(R)$. This is fulfilled within an approximation in case of small deviation of $f(R)$ from the General Relativity value.*

Key words: cosmology, Hubble parameter, f(R)-gravity.

УДК 524.8

С. Парновський, д-р фіз.-мат. наук
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ

МАТЕМАТИЧНІ ПРОБЛЕМИ, ПОВ'ЯЗАНІ З ПОХИБКАМИ ОЦІНКИ ВІДСТАНЕЙ ДО ГАЛАКТИК

Розглянуто деякі суто математичні проблеми, що виникають у процесі створення штучних вибірок даних при додаванні похибок до вихідних даних, створених за законом Габбла. Є дві різні можливості за генерації у випадку, коли відхилення у процесі оцінювання відстаней є пропорційними до них і відносна похибка визначення відстані є сталою. Обидві можуть бути застосовані на практиці, але їхні математичні властивості суттєво відрізняються. Крім обговорення проблем, що виникають для обох варіантів, розглянуто формули для опрацювання штучних каталогів за методами найменших квадратів (МНК) та максимальної правдоподібності (ММП). Показано, що формули МНК можна використовувати у ході застосування одного з методів додавання похибок, але кут нахилу оптимальної пропорційної залежності буде недооцінений. Водночас ММП можна використовувати лише для іншого методу додавання похибок. Отримано відповідні формули й оцінки.

Ключові слова: статистичні методи опрацювання даних, метод найменших квадратів, метод максимальної правдоподібності.

Вступ. У роботі [1] я розглянув деякі проблеми за визначення величини сталої Габбла, пов'язані з похибками в оцінках відстаней до галактик. Нехай ми маємо вибірку, що містить дані про відстані та швидкості N галактик з z<<1. Нам треба опрацювати ці дані та визначити з них величину параметра Габбла. Це просто зробити у ідеальному випадку, коли відсутні пекулярні рухи галактик і їх швидкості, визначені за червоним зміщенням, збігаються з габблівськими швидкостями v_i. А ті є пропорційними відстаням до галактик r_i згідно із законом Габбла:

$$v_i = Hr_i\,, \tag{1}$$

де H – параметр Габбла. Його значення у сучасну епоху є сталою Габбла. Визначити її за набором даних v_i та r_i дуже просто. На жаль, за реальних астрономічних спостережень ми визначаємо інший набір даних. До габблівських швидкостей додаються радіальні пекулярні швидкості, які ми вважатимемо випадковими. Як наслідок, для кожної галактики вимірюємо величину V_i, яка за припущенням така:

$$V_i = v_i + \delta V s_i\,, \tag{2}$$

де s_i – випадкова величина з нормальним розподілом, нульовим середнім та одиничною дисперсією, а $\delta V = \mathrm{const}$. Натомість, замість справжніх відстаней до галактик r_i ми маємо їх оцінки R_i, незалежні від червоного зміщення галактики, отримані за допомогою якоїсь статистичної залежності на кшталт відстані за цефеїдами, червоними